Vierte Ersatzarbeit

für die Stunde vom

12.9.2012

Zeitwert: Ca. eine Schulstunde plus Hausaufgabenzeit

Thema:

Steckbriefaufgaben bzw.

Bestimmung einer ganzrationalen

Funktion

Bitte ausfüllen:

Bearbeitungszeit: ___________________

Fehler ____

Fragen: ____

Bemerkung zu Beispielaufgaben und Verständlichkeit des Skripts:

____

____

____

Einleitung

In Klasse 11 wurde die Kurvendiskussion durchgenommen. Ziel einer Kurvendiskussion ist es von einer gegebenen Funktion Eigenschaften zu ermitteln. Zu diesen Eigenschaften gehören: Definitions- und Wertemenge, Symmetrie, Nullstellen, Steigung und Krümmungsverhalten einer Funktion. Anhand der Eigenschaften kann man dann die Funktion dann näherungsweise zeichnen.

Bei den so genannten Steckbriefaufgaben verhält es sich umgekehrt. Hier sind verschiedene Eigenschaften gegeben und die Funktion ist gesucht.

Beispiel: Eine Funktion geht durch die Punkte A(0 | 1), B(1 | 2), C(2 | 7). Wie lautet die Funktion.

Zunächst brauchen wir den Begriff „Grad einer Funktion“. Unter dem Grad einer Funktion verstehen wir, welchen Wert die höchste Potenz hat. Die Funktion $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ hat den Grad 4, da die höchste Potenz 4 ist.

Bei unserer Beispielfunktion wissen wir schon, dass es sich um eine Funktion 2. Grades handeln wird, da 3 Angaben gegeben sind. Hätten wir 4 Angaben, wäre es eine Funktion 3, Grades und bei 5 eine Funktion 4. Grades, u.s.w.
Wir stellen also die allgemeine Gleichung einer Funktion 2. Grades auf:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

In diese Funktion setzen wir die Punkte ein und erhalten damit folgendes Gleichungssystem:

I f(0) = 1

II f((1) = 2

III f(2) =7

Also:

I $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$

II $2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

III $7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

Umgestellt:

I $\quad a \cdot 0 + b \cdot 0 + 1c = 1$

II $\quad a + b + c = 2$

III $\quad 4a + 2b + c = 7$

In Matrixschreibweise:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ ➔ Vertauschen von I und III : $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-4)$ ➔

$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ I + II ➔ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ➔ c = 1 ➔ b = -1 und a = 2.

Also lautet die gesuchte Funktion:

$f(x) = 2x^2 - 1x + 1$

Übungsaufgabe 1: Rechne die gegeben Beispiele nach.

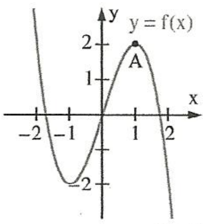

Fig. 1

Genau eine Lösung

Beispiel 1: (Grad der gesuchten Funktion ist gegeben)
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vom Grad 3 ist punktsymmetrisch zum Ursprung, geht durch $A(1|2)$ und hat für $x = 1$ eine waagerechte Tangente. Bestimmen Sie f.

Lösung:

1. Gegeben: $n = 3$; f ist ungerade; $f(1) = 2$; $f'(1) = 0$.
2. Ansatz ($n = 3$ und Punktsymmetrie): $f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$
   $f(1) = 2$: $a + b = 2$ (1)
   $f'(1) = 0$: $3a + b = 0$ (2)
3. Das Gleichungssystem führt zu $a = -1$; $b = 3$. Es ist also $f(x) = -x^3 + 3x$.
4. Die Funktion f ist ungerade und erfüllt die geforderten Bedingungen $f(1) = 2$, $f'(1) = 0$.

„Der Graph hat in A(0|4) einen Extrempunkt." Diese Angabe enthält zwei Bedingungen.

Beispiel 2: (Grad der gesuchten Funktion ist nicht gegeben)
Gesucht ist eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, deren Graph in $A(0|4)$ einen Extrempunkt hat, für $x = 2$ die x-Achse schneidet und durch $B(1|3)$ geht.

Lösung:

1. Bedingungen: $f(0) = 4$, $f'(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f(1) = 3$; Ansatz für $n = 3$.
2. Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
   $f(0) = 4$: $d = 4$ (1)
   $f'(0) = 0$: $c = 0$ (2)
   $f(2) = 0$: $8a + 4b + 2c + d = 0$ (3)
   $f(1) = 3$: $a + b + c + d = 3$ (4)
3. Mit $d = 4$ und $c = 0$ ergibt sich:
   $8a + 4b + 4 = 0$: $2a + b = -1$ (3')
   $a + b + 4 = 3$: $a + b = -1$ (4')
   Subtraktion von (3') und (4') ergibt $a = 0$ und $b = -1$. Mit $c = 0$ und $d = 4$ ist $f(x) = -x^2 + 4$.
4. Da $a = 0$ ist, ist die gefundene Funktion vom 2. Grad. Sie erfüllt die an sie gestellten Bedingungen.

Beispiel 3: (Grad der gesuchten Funktion ist nicht gegeben)
Für welche ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades ist $f(0) = f(2) = 0$ und $f'(1) = 0$?

Lösung:

1. Bedingungen: $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, $f'(1) = 0$; Ansatz für $n = 2$.
2. Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 2ax + b$
   $f(0) = 0$: $c = 0$ (1)
   $f(2) = 0$: $4a + 2b + c = 0$ (2)
   $f'(1) = 0$: $2a + b = 0$ (3)
3. Mit $c = 0$ ergibt sich:
   $4a + 2b = 0$: $2a + b = 0$ (2')
   $2a + b = 0$: $2a + b = 0$ (3')
   Gleichungen (2') und (3') sind identisch; es gilt: $b = -2a$. Damit ergibt sich: $f(x) = ax^2 - 2ax$; $a \in \mathbb{R}$.
4. Jede Funktion f mit $f(x) = ax^2 - 2ax$; $a \in \mathbb{R}$ erfüllt die geforderten Bedingungen.

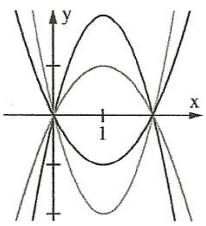

Fig. 3

Unendlich viele Lösungen
Ergebnis:
eine Kurvenschar

Zweite Übungsaufgabe: Nächste Seite:

Arbeitsblatt zum Thema Steckbrieffunktionen

Was bedeuten die gegeben Formulierungen? Bei Problemen: Google hilft. ☺

Eine ganzrationale Funktion…	Bedingung(en)
ist symmetrisch zur y-Achse.	
ist symmetrisch zum Ursprung.	
geht durch den Ursprung.	
hat bei x = 4 eine Nullstelle.	
geht durch den Punkt A(3/2).	
schneidet die x-Achse bei x = 2	
schneidet die y-Achse bei y = 3	
hat in A(3/2) einen Tiefpunkt.	
hat in A(2/3) ein lokales Maximum.	
berührt bei x = 1 die x-Achse.	
hat in A(3/1) die Steigung 2.	
berührt die Gerade 3x - 4y - 2 = 0 im Punkt P(2/1).	
scheidet in P(6/0) die x-Achse mit dem Anstieg 3.	
hat bei x = 4 eine zur x-Achse parallele Tangente.	
hat bei x = 1 einen Wendepunkt.	
hat bei x = 2 einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente.	
hat in O (= Ursprung) einen Wendepunkt mit der Wendetangente y = 2x	
Die Tangente in P(5/2) bildet mit der x-Achse eine Winkel von 45 °.	
Die Tangente in P(5/2) schließt mit der x-Achse einen Winkel von 135 ° ein.	